



IKER
GAZTE
NAZIOARTEKO
IKERKETA EUSKARAZ

III. IKERGAZTE NAZIOARTEKO IKERKETA EUSKARAZ

2019ko maiatzaren 27, 28 eta 29
Baiona, Euskal Herria

ANTOLATZAILEA:
Udako Euskal Unibertsitatea (UEU)

ZIENTZIAK ETA NATURA ZIENTZIAK

**Espazio-denborako EFMaren eta
lerroen metodo esplizituen arteko
baliokidetasuna: egonkortasun-
baldintza**

*Judit Muñoz-Matute,
Elisabete Alberdi Celaya,
David Pardo eta Victor Manuel Calo*

23-29 or.
<https://dx.doi.org/10.26876/ikergazte.iii.05.03>



Espazio-denborako EFMaren eta lerroen metodo esplizituen arteko baliokidetasuna: egonkortasun-baldintza

Muñoz-Matute, Judit¹; Alberdi Celaya, Elisabete¹; Pardo, David^{1,2,3}
eta Calo, Victor Manuel^{4,5}

¹Euskal Herriko Unibertsitatea (UPV/EHU)

²BCAM - Basque Center for Applied Mathematics, Bilbao

³IKERBASQUE, Basque Foundation for Science, Bilbao

⁴Applied Geology, Western Australian School of Mines, Faculty of Science and Engineering, Curtin University, Perth, WA, Australia 6845

⁵Mineral Resources, Commonwealth Scientific and Industrial Research Organisation (CSIRO), Kensington, WA, Australia 6152

elisabete.alberdi@ehu.eus

Laburpena

Denboraren eremuko problemei helburuetara orientatutako egokitzapena aplikatzeko, espazio-denborari dagokion formulazio bariazionala izatea ezinbestekoa da. Problema askatzeko espazio-denborako Elementu Finituen Metodoa (EFM) erabil badaiteke ere, lerroen metodoa erabiliz ere egin daiteke egokitzapena. Honek espazio-denborako EFMaren eta Ekuazio Diferentzial Arruntak (EDAk) askatzeko erabiltzen diren metodoen arteko baliokidetasuna aurkitzea eskatzen du. Erlazio hau ezaguna da metodo implizituztat, eta oraintsu metodo esplizituztat ere aurkitu dugu. Metodo esplizituek implizituek baino konputazio-kostu txikiagoa badute ere, egonkortasunari dagokion baldintza bete behar dute emaitza onak lortu nahi badira. Lan honetan egonkortasun baldintzaren kudeaketaz jardungo dugu.

Hitz gakoak: difusio ekuazio lineala, helburuetara orientatutako egokitzapena, metodo esplizituak denboran, errorearen adierazpena, elementu finituen metodoa

Abstract

For time-domain goal-oriented adaptivity a full space-time variational formulation is needed. Even though the problem can be solved employing space-time Finite Element Method (FEM), adaptivity can be performed using the Method of Lines (MoL). This requires to find the equivalence between the space-time FEM and the numerical methods for Ordinary Differential Equations (ODEs). This relationship is known for implicit methods, and recently, we have found it for some explicit methods. Explicit methods are computationally cheaper than the implicit ones, but they have to satisfy the stability requirement in order to obtain good results. This work is focused on how to perform adaptivity while satisfying the stability requirement.

Keywords: linear diffusion equation, goal-oriented adaptivity, explicit methods in time, error representation, finite element method

1. Sarrera eta motibazioa

Egokitzapen prozesuak tresna garrantzitsuak dira Deribatu Partzialetako Ekuazioak ebazterakoan (DPE), konputazio-kostua minimizatzeaz gain soluzio zehatzak lortzea ahalbidetzen duten sare optimoak sortarazten baituzte. Denboraren eremuko problemetan espazio-denborako Elementu Finituetako Metodoan (EFM) oinarritutako zenbait egokitzapen-algoritmo existitzen dira. Honen adibide dira *tent-pitching* deitutako estrategiak, zeintzuetan EFM metodoa erabiltzen den egiturarik gabeko sareak lortzeko (Erickson *et al.*, 2005; Abedi *et al.*, 2006; Miller eta Haber, 2008; Gopalakrishnan *et al.*, 2015). Beste alde batetik, badira zenbait algoritmo, gehienetan denboraren ibilbidean oinarritutakoak, espazioan zein denboran *hp*-metodo egokituak darabiltzatenak (Schötzau eta Sch-

wab, 2000b,a; Werder *et al.*, 2001) edota helburuetara orientatuko egokitzapen-algoritmoak (Besier eta Rannacher, 2012; Bangerth eta Rannacher, 2001). Metodo hauetan test eta saiakera funtzioek espazio-denboran tentsore biderketaren egitura dutela suposatzen da, eta denboran ez-jarrarituak diren zenbait funtzio oinarrian kontsideratuz, espazio-denborako EFMak denboraren ibilbideko eskemari jarraitzen dio. Hala ere, momentuz, bakarrik denboran implizituak diren metodoak daude erabilgarri literaturan, beraien egitura bariazioanala ezagutzen baita (Bangerth *et al.*, 2010; Köcher eta Bause, 2014). Gure helburua, denboraren eremuko DPEei helburuetara orientatutako egokitzapena aplikatzea izan da, denboran esplizituak diren metodoak erabiliz. Metodo esplizituek implizituek baino konputazio-kostu txikiagoa dutenez, algoritmo eraginkorragoa diseina daiteke.

2. Ikerketaren helburuak

Helburuetara orientatutako egokitzapen-algoritmoak oso erabilgarriak dira soluzioaren zenbait ezaugarri fisiko zehaztasunez hurbildu nahi direnean (Pardo *et al.*, 2006b; Mathelin eta Le Maître, 2007; Chamoïn eta Ladevèze, 2008; Almeida eta Oden, 2010; Van der Zee *et al.*, 2011; Alvarez-Aramberri eta Pardo, 2017; Darrigrand *et al.*, 2015, 2018). Hauxe gertatzen da ingeniaritzako zenbait problematan. Ezaugarri nabarmen hauei interes-kantitate deritze eta ohikoa da amaierako funtzionalak erabiliz adieraztea. Egokitzapen-algoritmoen helburua interes-kantitateko errorea murriztea izaten da (Becker eta Rannacher, 1996; Oden eta Prudhomme, 2001; Prudhomme eta Oden, 2003; Pardo *et al.*, 2006a, 2007). Honetarako problema duala definitzen da, non amaierako funtzionala iturri bihurtzen den. Problema dualak espazio-denborako puntu bakoitzak interes-kantitatean duen eraginari buruzko informazioa ematen du. Interes-kantitateko errorea problema primalaren eta dualaren erroreen menpe idazten da, eremu osoko integral baten bidez. Bukatzeko, errore honen goi-borne bat kalkulatzeko da elementu lokalen ekarpenen batuketa gisa, eta ekarpen hauen batura da egokitzapen prozesua gidatzen duena.

Denboraren menpeko problemetan, autore gehienek problema primala eta duala diskretizatzen dituzte lerroen metodoa erabiliz (ingelesez *Method of Lines*, MoL) (Schiesser, 2012; Collier *et al.*, 2013; Alberdi eta Anza, 2014; Vignal *et al.*, 2017). Aipatutako metodoan espazioko formulazio barietate batetik hasita, espazioko aldagaia EFMa erabilia diskretizatzen da. Era honetan lortzen den Ekuazio Diferentzial Arrunteko (EDA) sistema EDak askatzeko zenbakizko metodoen bidez ebazten da. Hala ere, denboraren eremuan helburuetara orientatutako egokitzapena egiteko aldagai biak ageri direneko problemaren formulazio barietate ezinbestekoa da, interes-kantitateko errorea eremu osoko integral baten bidez adierazteko (Díez eta Calderón, 2007). Honek esan nahi du, lerroen metodoaren bidezko diskretizazioa egin nahi bada beharrezkoa dela espazio-denborako EFMarekin duen baliokidetasuna ezagutzea.

Ezaguna da, zehaztasun ordena baxuko denboraren eremuko zenbait EFM eta EDak ebazteko zenbakizko metodo batzuk baliokideak direla (Schieweck, 2010; Hussain *et al.*, 2011; Ahmed eta John, 2015). Hauxe gertatzen da esaterako Eulerren metodo implizituarekin edota Crank-Nicholson-en metodoarekin. Aipatu ditugun metodo biak implizituak dira denboraren eremuan, eta izaera implizitudun metodoak dira helburuetara orientatutako egokitzapenean erabili izan direnak. Orainsu Runge-Kutta esplizituak ez-jarrarituak diren Petrov-Galerkin metodo gisa interpreta daitezkeela frogatu da (Muñoz-Matute *et al.*, 2018). Aipatutako lanean, Runge-Kutta metodo bat emarik, berari dagozkion test eta saiakera funtzioak nola eraiki daitezkeen azaltzen da, denboraren eremuan integrazio zehatza erabiliz.

Denboraren eremuan esplizituak diren metodoak erabiltzeak egonkortasunari dagokion Courant-Friedrichs-Lewy baldintza (CFL) betetzera behartzen gaitu (Strang, 1968). Honek esan nahi du egokitzapen estrategiak CFL baldintza bete behar duela bai hasieran, eta baita prozesuan zehar ere. Hau da, espazioan egindako fintzeen ondoren denboran burutu beharko dira fintzeak CFL baldintza berreskuratu nahi bada. Egonkortasun baldintza bete dadin denboraren sarean egin beharreko egokitzapena aztertuko dugu hemen.

3. Ikerketaren muina eta ondorioak

Izan bedi $\Omega \subset \mathbb{R}$ eta $I = (0, T] \subset \mathbb{R}$. Difusio ekuazio lineala kontsideratuko dugu:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f, & \text{in } \Omega \times I \\ u = 0, & \text{in } \partial\Omega \times I, \\ u(0) = u_0, & \text{in } \Omega \end{cases} \quad (1)$$

$f \in L^2(I; H^{-1}(\Omega))$ eta $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ izanik. (1) problemaren soluzio ahulak honako baldintza hauek betetzen

ditu:

$$\begin{aligned} \langle u_t, v \rangle + (u_x, v_x) &= \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ (u(0), v(0)) &= (u_0, v(0)), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \end{aligned} \quad (2)$$

non v deitu zaie test funtzioei, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ notazioa erabili da $H_0^1(\Omega)$ espazioaren eta bere dualaren $H^{-1}(\Omega)$ arteko dualtasun-biderkadura adierazteko, eta (\cdot, \cdot) erabili da $L^2(\Omega)$ -ko barne-biderkadura adierazteko. Espazio horiek honela definituta daude:

- Karratu integragarritun funtzioen espazioa: $L^2(\Omega) = \{g : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_{\Omega} g(x)^2 dx < +\infty\}$.
- Sobolev-en espazioa: $H^1(\Omega) = \{g \in L^2(\Omega) \mid g' \in L^2(\Omega)\}$.
- Sobolev-en espazioko $H_0^1(\Omega)$ azpiespazioa: $H_0^1(\Omega) = \{g \in H^1(\Omega) \mid g(x) = 0 \text{ izanik } \partial\Omega \text{ eremuan}\}$.
- Bochner-en espazioa: $L^2(I; V) = \{g : I \rightarrow V \mid g \text{ funtzioa } V - \text{neurgarria eta } \int_I \|g(t)\|_V^2 dt < +\infty\}$.

(2) problema diskretizatzeke, Ω eremuaren honako partiketa hau kontsideratuko dugu:

$$\begin{array}{ccccccc} | & & | & & | & & | & & | \\ x_0 & & x_1 & & x_2 & & \dots & & x_{n-1} & & x_n \end{array}$$

Espazioan zatika linealak diren funtzioak kontsideratuz, (2) problema honako EDA sistema honen baliokidea dela lortzen da:

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Aurkitu } U, \text{ non:} \\ M \frac{dU}{dt} + KU = F, \end{array} \right. \quad (3)$$

M eta K masa- eta zurruntasun-matrizeak izanik, eta F indarren bektorea. Baldin eta $h := x_i - x_{i-1}$ bada, $\forall i = 1, \dots, n$, orduan, masa- eta eta zurruntasun-matrizeak honako hauek dira:

$$M = \begin{pmatrix} h/3 & h/6 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ h/6 & 2h/3 & h/6 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & h/6 & 2h/3 & h/6 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h/6 & 2h/3 & h/6 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & h/6 & 2h/3 & h/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & h/6 & h/3 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

$$K = \begin{pmatrix} 1/h & -1/h & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1/h & 2/h & -1/h & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1/h & 2/h & -1/h & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/h & 2/h & -1/h & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1/h & 2/h & -1/h \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1/h & 1/h \end{pmatrix}. \quad (5)$$

(3) problemaren egonkortasun analisia egiteko, EDA sistema era honetan idatzi beharra dago:

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Aurkitu } U, \text{ non:} \\ \frac{dU}{dt} = -M^{-1}KU + M^{-1}F. \end{array} \right. \quad (6)$$

Eta egonkortasuna ziurtatzeko, $\mathcal{A} = -M^{-1}K$ matrizearen autobalioak EDA askatzeko darabilgun zenbakizko metodoaren egonkortasun-eremuan egon beharko dute.

3.1. Runge-Kutta metodo esplizituak

s -ataleko Runge-Kutta metodoak era honetan emanda daude:

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^s b_i k_i, \quad (7)$$

$$\text{non: } k_i = f(t_n + c_i h, y_n + h \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j), \quad i = 1, 2, \dots, s. \quad (8)$$

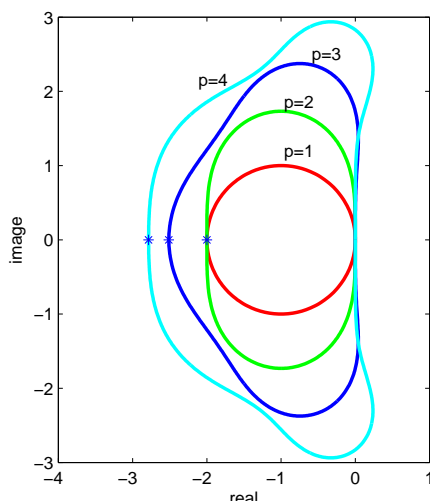
(7) eta (8) formuletak a_{ij} , b_i , c_i konstanteak Butcher taula batean jaso ohi dira. Butcher taularen matrize-adierazpena 1 taulan ikus daiteke, $\mathbf{b} = [b_1, b_2, \dots, b_s]^T$ eta $\mathbf{c} = [c_1, c_2, \dots, c_s]^T$, s dimentsioko bektoreak izanik eta $A = [a_{ij}]$, $s \times s$ dimentsioko matrizea.

1. taula. Butcher taularen matrize-adierazpena.

$$\begin{array}{c|c} \mathbf{c} & A \\ \hline & \mathbf{b}^T \end{array}$$

Atal kopurua (s) eta zehaztasun ordena (p) berdinak dituzten (hau da, $s = p$) Runge-Kutta esplizituen (eta hau $s = 1, 2, 3, 4$ kasuetan betetzen da) egonkortasun eremuak 1 irudian adierazi dira.

1. Irudia: Runge-Kutta metodo esplizituen egonkortasun eremua $s = p$ kasurako (kurben barneko alde).



EDA sistema ebazteko aipatutako Runge-Kutta metodo esplizituak darabiltzagunean, (3) egonkorra izango da $\lambda \Delta t$ balioak metodoaren egonkortasun eremuan badaude; λ , \mathcal{A} matrizearen autobalioa izanik. \mathcal{A} matrizeak autobalio erreal negatiboak ditu. Beraz, Runge-Kutta metodo esplizituak darabiltzagunean modulurik handieneko autobalioak honako hau betetzea eskatuko dugu:

$$\tilde{a} < \lambda_{max} \cdot \Delta t < 0, \quad (9)$$

\tilde{a} izanik egonkortasun eremuko ezkerreko mugaren x osagaia. 1 irudian, \tilde{a} puntua “*” erabiliz adierazi da. $s = 1$ denean, $\tilde{a} = -2$ da; $s = 2$ denean, $\tilde{a} = -2$; $s = 3$ denean, $\tilde{a} = -2.512745326618328$; eta $s = 4$ denean, $\tilde{a} = -2.785293563405274$. Modulurik handieneko \mathcal{A} matrizearen autobalioa $\lambda_{max} = -12/h^2$ denez, CFL baldintza honela geratzen da:

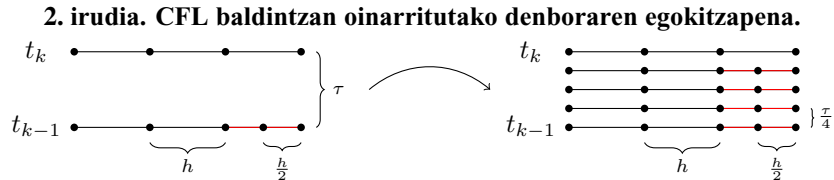
$$-\frac{12}{h^2} \cdot \Delta t > \tilde{a} \Leftrightarrow \frac{12}{h^2} \cdot \Delta t < -\tilde{a} \Leftrightarrow \frac{\Delta t}{h^2} < \frac{-\tilde{a}}{12}. \quad (10)$$

3.2. CFL baldintzan oinarritutako denboraren egokitzapena

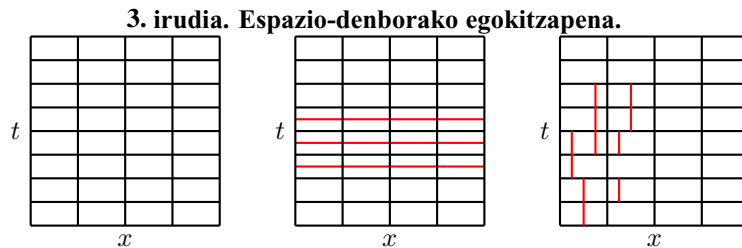
Izan bedi h_k , espazioko sareko elementurik txikienaren tamaina t_k aldiunean. Orduan CFL baldintza hauxe litza-teke:

$$\frac{\tau_k}{h_k^2} < \frac{-\tilde{a}}{12} \text{ (problema dualerako), } \frac{\tau_{k+1}}{h_k^2} < \frac{-\tilde{a}}{12} \text{ (primalerako),} \quad (11)$$

non $\tau_k = t_k - t_{k-1}$ eta $\tau_{k+1} = t_{k+1} - t_k$. Eta denborari dagokion sarea (11) baldintzaren arabera egokitu beharra dago. Behin espazioko sarea definituta dagoenean, CFL baldintza betetzen ez duten denbora tarreak identifikatu ditugu eta banatu egin ditugu, espazioaren diskretizazioko aldi bereko maila berriak sartuz (espazioko sareak). 2 irudian ikus daiteke denborako egokitzapen prozesua. (11) baldintzan h_k^2 agertzen denez, denbora tartea 4 zatitan banatu behar da CFL baldintza bete dadin.



Egokitzapena independenteki burutzen da denboran (globalean) eta espazioan (lokalean), 3 irudian ikus daitekeen moduan.



4. Etorkizunerako planteatutako norabidea

Helburuetara orientatutako egokitzapena metodo esplizituen bidez egiteak egonkortasun baldintza betetzera behar-tzen gaitu. Honek esan nahi du darabilgun metodoari dagokion CFL baldintza kalkulatu beharko dela eta espazio-denbora sareak baldintza hori bete beharko duela. Egonkortasun baldintza bete nahi bada, sarearen egokitzapena nola egin aztertu dugu. Lan honetan espazio-denbora sarea independenteki egokitu da: denboran (globalean) eta espazioan (lokalean). Etorkizunera begirako lana izan daiteke bai espazioan eta bai denboran fintze lokalak egitea, denboran esplizituak diren metodoen baliokideak diren espazio-denborako EFMak erabiliz.

5. Erreferentziak

- Abedi, Reza, Boris Petracovici, eta Robert B Haber. 2006. A space-time discontinuous Galerkin method for linearized elastodynamics with element-wise momentum balance. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 195.3247–3273.
- Ahmed, Naveed, eta Volker John. 2015. Adaptive time step control for higher order variational time discretizations applied to convection-diffusion-reaction equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 285.83–101.
- Alberdi, Elisabete, eta Juan Jose Anza. 2014. Solution of the wave-type PDE by numerical damping control multistep methods. *Procedia Computer Science* 29.779–789.
- Almeida, Regina C, eta J Tinsley Oden. 2010. Solution verification, goal-oriented adaptive methods for stochastic advection–diffusion problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 199.2472–2486.
- Alvarez-Aramberri, Julen, eta David Pardo. 2017. Dimensionally adaptive hp-finite element simulation and inversion of 2D magnetotelluric measurements. *Journal of Computational Science* 18.95–105.

- Bangerth, Wolfgang, Michael Geiger, et al Rolf Rannacher. 2010. Adaptive Galerkin finite element methods for the wave equation. *Computational Methods in Applied Mathematics* 10.3–48.
- , et al Rolf Rannacher. 2001. Adaptive finite element techniques for the acoustic wave equation. *Journal of Computational Acoustics* 9.575–591.
- Becker, Roland, et al Rolf Rannacher. 1996. *Weighted a posteriori error control in FE methods*. IWR.
- Besier, Michael, et al Rolf Rannacher. 2012. Goal—oriented space–time adaptivity in the finite element Galerkin method for the computation of nonstationary incompressible flow. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 70.1139–1166.
- Chamoin, Ludovic, et al Pierre Ladevèze. 2008. A non-intrusive method for the calculation of strict and efficient bounds of calculated outputs of interest in linear viscoelasticity problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 197.994–1014.
- Collier, Nathan, Hany Radwan, Lisandro Dalcin, et al Victor M Calo. 2013. Time adaptivity in the diffusive wave approximation to the shallow water equations. *Journal of Computational Science* 4.152–156.
- Darrigrand, Vincent, David Pardo, et al Ignacio Muga. 2015. Goal-oriented adaptivity using unconventional error representations for the 1D Helmholtz equation. *Computers & Mathematics with Applications* 69.964–979.
- , Ángel Rodríguez-Rozas, Ignacio Muga, David Pardo, Albert Romkes, et al Serge Prudhomme. 2018. Goal-oriented adaptivity using unconventional error representations for the multidimensional Helmholtz equation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 113.22–42.
- Díez, Pedro, et al Giovanni Calderón. 2007. Goal-oriented error estimation for transient parabolic problems. *Computational Mechanics* 39.631–646.
- Erickson, Jeff, Damrong Guoy, John M Sullivan, et al Alper Üngör. 2005. Building spacetime meshes over arbitrary spatial domains. *Engineering with Computers* 20.342–353.
- Gopalakrishnan, Jay, Peter Monk, et al Paulina Sepúlveda. 2015. A tent pitching scheme motivated by Friedrichs theory. *Computers & Mathematics with Applications* 70.1114–1135.
- Hussain, Shafqat, Friedhelm Schieweck, et al Stefan Turek. 2011. Higher—order Galerkin time discretizations and fast multigrid solvers for the heat equation. *Journal of Numerical Mathematics* 19.41–61.
- Köcher, Uwe, et al Markus Bause. 2014. Variational space-time methods for the wave equation. *Journal of Scientific Computing* 61.424–453.
- Mathelin, Lionel, et al Olivier Le Maître. 2007. Dual-based a posteriori error estimate for stochastic finite element methods. *Communications in Applied Mathematics and Computational Science* 2.83–115.
- Miller, Scott T, et al Robert B Haber. 2008. A spacetime discontinuous Galerkin method for hyperbolic heat conduction. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 198.194–209.
- Muñoz-Matute, Judit, David Pardo, Victor M Calo, et al Elisabete Alberdi. 2018. Variational formulations for explicit Runge-Kutta methods. *arXiv preprint arXiv:1806.07803*.
- Oden, John Tinsley, et al Serge Prudhomme. 2001. Goal-oriented error estimation and adaptivity for the finite element method. *Computers & Mathematics with Applications* 41.735–756.
- Pardo, D, L Demkowicz, C Torres-Verdin, et al M Paszynski. 2007. A self-adaptive goal-oriented hp-finite element method with electromagnetic applications. Part II: Electrodynamics. *Computer methods in applied mechanics and engineering* 196.3585–3597.
- , L Demkowicz, C Torres-Verdín, et al L Tabarovsky. 2006a. A goal-oriented hp-adaptive finite element method with electromagnetic applications. Part I: Electrostatics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 65.1269–1309.
- Pardo, David, Leszek Demkowicz, Carlos Torres-Verdín, et al Maciej Paszynski. 2006b. Simulation of resistivity logging-while-drilling (LWD) measurements using a self-adaptive goal-oriented hp-finite element method. *SIAM Journal on Applied Mathematics* 66.2085–2106.
- Prudhomme, Serge, et al J Tinsley Oden. 2003. Computable error estimators and adaptive techniques for fluid flow problems. *Error Estimation and Adaptive Discretization Methods in Computational Fluid Dynamics* 25.207–268.
- Schiesser, William E. 2012. *The numerical method of lines: integration of partial differential equations*. Elsevier.

- Schieweck, Friedhelm. 2010. A-stable discontinuous Galerkin—Petrov time discretization of higher order. *Journal of Numerical Mathematics* 18.25–57.
- Schötzau, Dominik, eta Christoph Schwab. 2000a. An hp a priori error analysis of the DG time-stepping method for initial value problems. *Calcolo* 37.207–232.
- , eta Christoph Schwab. 2000b. Time discretization of parabolic problems by the hp-version of the discontinuous Galerkin finite element method. *SIAM Journal on Numerical Analysis* 38.837–875.
- Strang, Gilbert. 1968. On the construction and comparison of difference schemes. *SIAM Journal on Numerical Analysis* 5.506–517.
- Van der Zee, KG, EH Van Brummelen, I Akkerman, eta R De Borst. 2011. Goal-oriented error estimation and adaptivity for fluid–structure interaction using exact linearized adjoints. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 200.2738–2757.
- Vignal, Philippe, N Collier, Lisandro Dalcin, DL Brown, eta V M Calo. 2017. An energy-stable time-integrator for phase-field models. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 316.1179–1214.
- Werder, Thomas, Klaus Gerdes, Dominik Schötzau, eta Christoph Schwab. 2001. hp-discontinuous Galerkin time stepping for parabolic problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 190.6685–6708.

6. Eskerrak

Autore guztiek “Union’s Horizon 2020 research and innovation” programako dirulaguntza jaso dute, Marie Skłodowska-Curie No. 777778 erreferentziaduna.

Lehenengo hiru autoreak Euskal Gobernuako Ikerketa Talde Kontsolidatuak (IT649-13 Mathematical Modeling, Simulation, and Industrial Applications M2SI), eta Espainiar Gobernuako Ekonomia eta Lehiakortasun Ministeritzako MTM2016-76329-R (AEI/FEDER, EU), eta MTM2016-81697-ERC/AEI erreferentzia zenbakidun proiektuek partzialki diruz lagunduak izan dira.

David Pardok BCAM-eko “Severo Ochoa” bikaintasun akreditazioko SEV-2013-0323 eta Euskal Gobernuako BERC 2014-2017 programako laguntzak ere jaso ditu.

Victor M. Calo Curtin Unibertsitateko CSIRO Professorial Chair in Computational Geoscience-ek partzialki diruz lagundua izan da. Errusiako Gobernuaren (N 14.Y26.31.0013) eta Commonwealth Scientific Industrial Research Organisation-eko Deep Earth Imaging Enterprise Future Science Platforms-eko dirulaguntzak ere jaso ditu.

Judit Muñoz Matutek Euskal Herriko Unibertsitateko dirulaguntza ere jaso du, No. PIF15/346.