I. IKERGAZTE

NAZIOARTEKO IKERKETA EUSKARAZ

2015eko maiatzaren 13, 14 eta 15
Durango, Euskal Herria

ANTOLATZAILEA:
Udako Euskal Unibertsitatea (UEU)

ZIENTZIA ZEHATZAK ETA NATUR ZIENTZIAK

Kontrol optimo problema bat Lotka-Volterra ereduarekin: turnpike propietatea eta zenbait ebazpen numeriko

Aitziber Ibáñez

363-370 or.
https://dx.doi.org/10.26876/ikergazte.i.49

ANTOLATZAILEA: BABESLEAK: LAGUNTZAILEAK:

Kontrol optimo problema bat Lotka-Volterra ereduarekin: turnpike propietatea eta zenbait ebazpen numeriko

Aitziber Ibañez

BCAM-Basque Center for Applied Mathematics. Mazarredo Zumarkalea 14, 48009, Bilbao

Laburpena

Turnpike Teoriaren arabera, kontrol optimizazio problema bat denbora-tarte luze batean ebaztean, hipotesi batzuk betez gero, bai estatu optimoa eta bai kontrol optimoa ibilbide konkretu batetik gertu mantenduko dira denbora gehienean zehar. Lan honetan, turnpike fenomenoa populazio dinamika problema batean aztertzen dugu, Lotka-Volterra ereduan hain zuzen. Ondoren, turnpike hura jaurtiera bakarreko metodo klasikoa hobetzeko nola erabili ahal den erakusten dugu, (Trelat eta Zuazua, 2015)-n proposatzen den ideia jarraituz.

Hitz gakoak: Lotka-Volterra eredua, turnpike, kontrol optimizazioa

Abstract

The Turnpike Theory establishes that, when an optimal control problem is defined in a large time interval, and under certain conditions, its optimal solution remains exponentially close to a concrete path for most of the time. Here, we analyse the turnpike phenomenon for a control problem in population dynamics, modelled by the Loka-Volterra system. Based on that, we also show how the turnpike property can be used to improve the classical single shooting method, following the idea proposed in (Trelat eta Zuazua, 2015).

Keywords: Lotka-Volterra model, optimal control, turnpike

1 Sarrera eta motibazioa

Lan hau Kontrol Optimoaren Teoriaren testuinguruan kokatzen da. Kontrol Teoriak sistema dinamikoen portaera aztertzen duen arloa da, tresna eta kontzeptu matematiko ezberdinak erabiliz (ikusi adibidez (Fernández-Cara eta Zuazua, 2003) arlo honen teoria eta aplikagarritasun ezberdinen laburpen gisa). Orokorrean, kontrol optimizazio problemek hurrengo itxura daukate:

$$A(y) = f(u) \tag{1}$$

$$min_{u\in U_{ad}} K(u) \tag{2}$$

bertan y estatu-bektorea da, eta u, U_{ad} kontrol onargarrien multzoaren barne dagoen kontrola. Bestalde, $A : D(A) \subset Y \longrightarrow Y$ eta $f : U_{ad} \longrightarrow Y$, y estatu-bektoreak bete beharreko ekuazioak eta kontrolak sistemaren gain duen eragina adierazten duten bi funtzio dira, hurrenez hurren. (2) funtzioak, berriz, kontrola aplikatzeak dakarren kostea adierazten du.

Optimizazio Kontrol Teoriak, ezarritako helburu jakin batera ailegatzeko aukeratu beharreko kontrola kalkulatzeko tresnak ematen dizkigu, kostea, hau da, (2) funtzioa, ahal bezain baxuen izanik.

Problema hauek denbora tarte luzeetan ebazten direnean, maiz *turnpike* deritzon fenomenoa azaltzen da. Problema baten ebazketa denbora tarte luze batean bide jakin batera jotzen duenean, "turnpike"-a duela esaten dugu. Ibilbide hura (1) eta (2) problemari lotutako problema estatikoaren (hotz, denborarekiko menpekotasun barik) soluzio optimoa da eta oreka estatu horri turnpike deritzo.

Turnpike propietatea $[T_1, T_2]$ denbora tarteetan zehar aztertzen da, $T_1 < T_2$ zenbaki erreal positiboak izanik (denbora tartea $[0, \infty)$ motakoa izatea ere posiblea da). Optimizazio problema baten ebazketa denbora tartearen, koste irizpidearen (hau da, (2) funtzioaren) eta hasiera eta bukaera baldintzen menpekoa da. Turnpike Teoriak problema hauen ebazpidearen egitura aztertzen du koste irizpidea finkatu eta beste baldintzak aldatzen direnean. Turnpike propietatea izateak, ebazpen optimoa oinarrian kostefuntzioarengatik determinatuta dagoela adierazten du, $[T_1, T_2]$ denbora tartearen muturretan izan ezik. Hau da, t denbora unea muturretik gertu ez badago, emaitzaren balioa problemaren turnpike-ibilbidetik gertu egongo da.

Propietate honen abantaila, denbora-tarte luzeetan zehaztutako kontrol-problemen ebazpen optimoaren gaineko ezagutza ematen digula da, analitikoki ebaztu behar izan gabe. Gaur egun guztiz naturala da Biologia, Fisika zein Giza-Zientzietan azaltzen diren zenbait fenomeno denbora tarte luzeetan zehar ikertzea. Behar horrek turnpike propietatea aztertzera garamatza, eta horren bidez jakin dezakegu, kontrol-sistemak hipotesi jakin batzuk bete ez gero, bai estatu optimoa bai kontrol optimoa denbora gehienean zehar ibilbide jakin batetik esponentzialki gertu egongo direla.

Lan honetan, lehenik eta behin biologia arloko eredu bat adibidetzat erabiliz, Lotka-Volterra eredua hain zuzen, fenomeno hura erakusten da. Bigarrenik, propietate hau kontrol-problema ebazteko ere erabili daitekela adierazten da, jaurtiera bakarreko metodo klasikoa hobetuz, (Trelat eta Zuazua, 2015) artikuluan adierazten den moduan.

2 Arloko egoera eta ikerketaren helburuak

John vonNeumann eta Paul Samuelson (azken hau Ekonomia arloko Nobel Sariaren irabazle 1970. urtean) izan ziren fenomeno hau aztertzen lehenak. "Turnpike" Estatu Batuetako zenbait autobideren izena da, eta bere jatorria fenomeno hau izendatzeko, Samuelsonek horren gain egindako interpretazioan dago (ikusi (Samuelson *et al.*, 1958)): demagun Durangotik Parisera kotxez bidaiatu nahi dugula, modu hoberena Durangotik atera eta ahal bezain laster autobidean sartzea izango litzateke, eta bertatik Parisetik gertu gaudenean ateratzea. Hau da, Durango eta Parisen ingurunetan izan ezik, autobidean (problema honen "turnpike"-a, alegia) egongo gara seguruenik. Ekonometria arloan estatu-egonkor hauei VonNeumann puntuak deritzaie.

(Samuelson *et al.*, 1958)-en egindako lanaren ondoren, VonNeumann ereduarentzako lehenengo frogak (McKenzie, 1963), (Morishima, 1961) eta (Radner, 1961)-ek eman zituzten. Bestalde, fenomeno honen inguruko zenbait emaitza teoriko (Zaslavski, 2006) eta (Carlson *et al.*, 1991)-n aurki daitezke. (Wilde eta Kokotovic, 1972) eta (Anderson eta Kokotovic, 1987)-en Kalmanen baldintza betetzen duten problema lineal kuadratikoentzako turnpike propietatea frogatzen da, Hamilton-Jacobi ekuazioetan oinarrituz. Bestalde, problema hauen emaitz optimoaren turnpike-arekiko konbergentzia aztertzen da (Porretta eta Zuazua, 2013) -en.

Lan hau (Trelat eta Zuazua, 2015) artikuluan ematen diren emaitzetan oinarritzen da, bertan Pontryaginen Maximoaren Printzipioan oinarrituz, problema ez-linealentzat turnpike teorema orokor bat frogatzen da.

Ondoren, emaitza hura laburbilduko dugu. Demagun hurrengo kontrol optimizazio problema daukagula:

$$\dot{x} = f(x(t), u(t)) \tag{3}$$

non $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ C^2 motako funtzioa den, eta $u(t) \in L^\infty([0, T]; \mathbb{R}^m)$. Izan bedi $f^0 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ C^2 funtzio bat, $T > 0$ izanik. Bestalde, hurrengo koste-funtzioa definitzen dugu:

$$C_T(u) = \int_0^T f^0(x(t), u(t))dt \tag{4}$$

Horrez gain, $R : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$, hasiera eta bukaera baldintzak adierazten dituen C^2 funtzioa daukagu.

$$R(x(0), x(T)) = 0 \tag{5}$$

Laburbilduz, (Trelat eta Zuazua, 2015)-n, zenbait hipotesi gain hartuz gero eta T handia izanda, (4) koste funtziodun (3) problemaren emaitza $(\bar{x}, \bar{p}, \bar{u})$ bidetik esponentzialki gertu mantentzen dela frogatzen da, $[0, \tau]$ hasiera eta $[T-\tau, T]$ bukaera denbora-tarteetan izan ezik. Ibilbide hura problemaren turnpike-a dela deritzogu eta hasierako problemari lotuta dagoen hurrengo problema estatikoaren eta dagokion Lagrangiar multiplikatzaileen erregelaren emaitza da:

$$min_{f(x,u)=0} f^0(x,u) \tag{6}$$

Lagrangiar multiplikatzaileen erregelaren arabera, $(\bar{p}, \bar{p}^0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} - \{(0,0)\}$ bektorea existitzen da, non $\bar{p}^0 \leq 0$ (normalean $\bar{p}^0 = -1$ hartzen da, orkortasun galera barik) eta zeinek hurrengo baldintzak betetzen dituen:

$$\begin{aligned} f(x,u) &= 0 \\ \bar{p}^0 \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{p}, \bar{u}) + \langle \bar{p} \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{p}, \bar{u}) \rangle &= 0 \\ \bar{p}^0 \frac{\partial f}{\partial u}(\bar{x}, \bar{p}, \bar{u}) + \langle \bar{p} \frac{\partial f}{\partial u}(\bar{x}, \bar{p}, \bar{u}) \rangle &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

Izan bedi sistemaren Hamiltoniarraren matrize hessiarra:

$$Hess_{(\bar{x}, \bar{p}, -1, \bar{u})} H = \begin{pmatrix} H_{xx} & H_{xp} & H_{xu} \\ H_{px} & 0 & H_{pu} \\ H_{ux} & H_{up} & H_{uu} \end{pmatrix}$$

(Trelat eta Zuazua, 2015)-n probatzen den teorema hurengoa da:

Teorema: 1 *Demagun H_{uu} matrizea simetrikoa eta negatiboki definitua dela, $W = -H_{xx} + H_{xu} H_{uu}^{-1} H_{ux}$ matrizea positiboki definitua dela, eta hurrengo matrize bikoteak $A = H_{px} - H_{pu} H_{uu}^{-1} H_{ux}$ and $B = H_{pu}$ Kalman baldintza betetzen duela:*

$$rank(B, AB, ..., A^{n-1}B) = n$$

Demagun ere $(\bar{x}, \bar{x})$ puntua ez dela R funtzioaren puntu singular bat, eta R-ren hesiarraren norma $(\bar{x}, \bar{x})$ puntuan behar bezain txikia dela. Horrez gain, $\epsilon > 0$, $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, $T_0 > 0$ konstanteak existitzen badira, zeinek hurrengoa betetzen duten:

$$\bar{D} = ||R(\bar{x}, \bar{x})|| + ||(-\bar{p}, \bar{p})^t - \sum_{i=1}^{k} \gamma_i \nabla R^i(\bar{x}, \bar{x})|| \leq \epsilon$$

orduan, $\forall T > T_0$, (4) koste funtzioa duen (3) problemak hurrengo desberdintasuna betetzen duen emaitza optimo bat dauka gutxienez:

$$||x(t) - \bar{x}|| + ||p(t) - \bar{p}|| + ||u(t) - \bar{u}|| \leq C_1(e^{-C_2 t} + e^{-C_2(T-t)}) \tag{8}$$

Teoremaren (8) desberdintasuna aztertuz gero, $t \approx T/2$ denean, eskuineko atala oso txikia dela ikus daieteke.

Oharra: $(\bar{x}, \bar{p}, \bar{u})$ oreka puntuarekiko ebazpen optimoaren gertutasuna C_1 eta C_2 konstanteen menpekoa da. C_1 menpekotasun lineala du $\bar{D}$ eta $e^{-C_2 T}$-rekiko. Bestalde, C_2-ri dagokionez:

$$C_2 = -max\{\Re(\mu) | \mu \in Spec(A - BH_{uu}^{-1} B^t E_-)\}$$

non E_- hurrengo Riccati-ekuazioaren ebazpen matrizial simetriko negatibo txikiena da:

$$XA + A^t X - XBH_{uu}^{-1} B^t X - W = 0$$

3 Turnpike-a Lotka-Votlerra ereduan eta optimizazio problemaren ebazpen numerikoa turnpike-a erabiliz

3.1 Lotka-Volterra ereduan oinarritutako kontrol optimizazio problema bat

Lotka-Volterraren ereduak, bi espeziez (horietako bat harrapakin eta bestea harraparia izanik) osatutako ekosistema baten denborarekiko garapena adierazten du, bi ekuazio diferentzial ez-linealez osaturik dagoelarik:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_1(\alpha - \beta x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_2(\gamma - \delta x_1) \end{aligned} \tag{9}$$

non x_1 espezie harrapakariaren poblazio dentsitatea irudikatzen duen aldagaia den, x_2 harrapariarena, eta α, β, γ eta δ espezien arteko erlazioa adierazten duten parametro positibo errealak diren. Eredu honi buruz literatura asko aurki daiteke, ikusi (Brauer eta Castillo-Chavez, 2011) adibidez.

Gure hurrengo galdera, bi espezieen populazioan nola eragin dezakegun da. Adibide honetan, arrantza kontrol moduan ikusi daiteke. Horretarako, ekuazio bakoitzean $u(t)$ kontrol aldagaia gehitu behar dugu:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= x_1(t)(\alpha - \beta x_2(t)) - x_1(t)k_1u(t) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= -x_2(t)(\gamma - \delta x_1(t)) - x_2(t)k_2u(t) \\ 0 &\leq u(t) \leq 1 \end{aligned} \tag{10}$$

non k_1, k_2 konstanteak, goreneko arrantza-maila adierazten duten (hay da, $k_1 = 1$ bada, denbora une batean harrapakari guztiak arrantza dezakegula esan nahiko luke).

Lan honetan hurrengo kontrol problema aztertuko dugu:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= x_1(t) - x_1(t)x_2(t) - 0.4x_1(t)u(t) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= -x_2(t) + x_1(t)x_2(t) - 0.2x_2(t)u(t) \\ (x_1(0), x_2(0)) &= (0.5; 0.7); \\ 0 &\leq u(t) \leq 1, \\ T &= 60; \end{aligned} \tag{11}$$

hurrengo koste funtzioarekin batera:

$$\min_{u(t)\in L^2([0,T])} \frac{1}{2}\int_0^T ((x_1(t)-1)^2 + x_2(t)^2 + u(t)^2)dt \tag{12}$$

(Trelat eta Zuazua, 2015) lanean garatutako teoria problema honi aplikatu ahal izateko, lehendabizi Pontryaginen Maximoaren Printzipioa aplikatu behar diogu (12) koste-funtzioa duen (11) kontrol problemari. Printzipio honek problema baten ebazpen optimoak bete beharreko zenbait baldintza ematen dizkigu (Printzipio honi buruzko teoria (Trélat, 2005) liburuan aurkitu daiteke). Muga-baldintzak adierazten dituen R funtzioa hurrengoa da:

$$R(x(0), x(T)) = (x_1(0) - 0.5, x_2(0) - 0.7) \tag{13}$$

Ondoren, kontrol sistemaren Hamiltoniarra kalkulatu behar dugu:

$$H = p_1(x_1 - x_1x_2 - 0.4x_1u) + p_2(-x_2 + x_1x_2 - 0.2x_2u) - \frac{1}{2}((x_1-1)^2 + x_2^2 + u^2) \tag{14}$$

Pontryaginen Maximoaren Printzipioa erabiltzetik, hurrengo bektore adjuntoa lortzen da:

$$\begin{aligned} \dot{p_1} &= (-1+0.4u)p_1 + x_2(p_1 - p_2) + (x_1 - 1) \\ \dot{p_2} &= (1+0.2u)p_2 + x_1(p_1 - p_2) + x_2 \end{aligned} \tag{15}$$

bestalde, Hamiltoniarraren maximizazio baldintzatik:

$$u = \begin{cases} 0 & \textit{baldin eta} \quad -0.4x_1p_1 - 0.2p_2x_2 < 0 \\ -0.4x_1p_1 - 0.2p_2x_2 & \textit{baldin eta} \quad 0 \le -0.4x_1p_1 - 0.2p_2x_2 \le 1 \\ 1 & \textit{baldin eta} \quad -0.4x_1p_1 - 0.2p_2x_2 > 1 \end{cases} \tag{16}$$

eta azkenik, zeharreko baldintzen arabera : $(p_1(T), p_2(T)) = (0,0)$. Pontryaginen Maximoaren Printzipioaren ondorioz lortutako baldintza eta ekuazio hauek kontrol optimoa bete beharreko baldintzak ematen dizkigu.

Erraza da problema honek Teorema1-eko hipotesiak betetzen dituela kudeatzea. Bere turnpike-a kalkulatzeko, (11) eta (12) ekuazioetan denborarekiko menpekotasuna deuseztatzen lorturiko hurrengo problema-estatikoa ebatzi behar da:

$$\min((x_1-1)^2 + x_2^2 + u^2) \tag{17}$$

hurrengo mugei lotuta:

$$\begin{aligned} &0 \le u \le 1 \\ &x_1(1 - x_2 - 0.4u) = 0 \\ &x_2(-1 + x_1 - 0.2u) = 0 \end{aligned} \tag{18}$$

Bere soluzioa $(\bar{x_1}, \bar{x_2}, \bar{u}) = (\frac{16}{15}, \frac{13}{15}, \frac{1}{3})$ da. Ondoren, $(\bar{p_1}, \bar{p_2})$ baloreak (7) ekuaziotik ondorioztatu ditzakegu, problemaren turnpike-a lortuz:

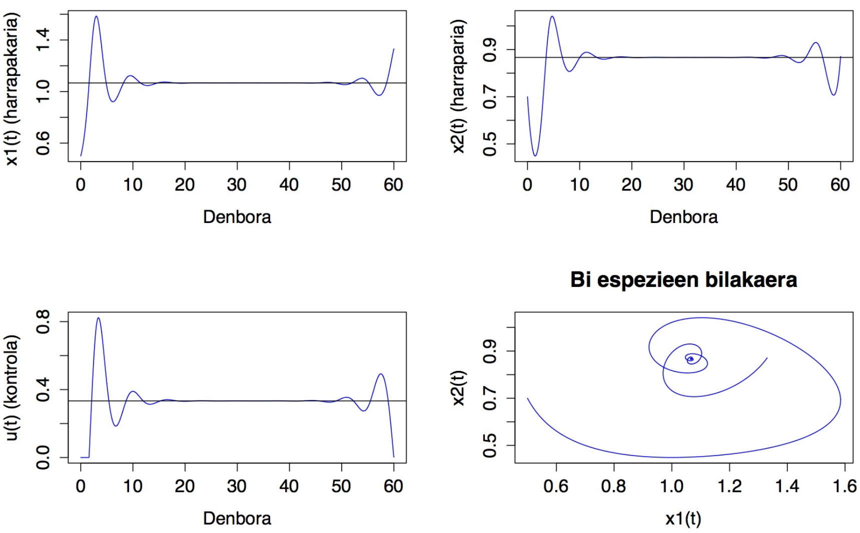
$$(\bar{x_1}, \bar{x_2}, \bar{p_1}, \bar{p_2}, \bar{u}) = (\frac{16}{15}, \frac{13}{15}, -0.8125, 0.07692308, \frac{1}{3}) \tag{19}$$

Aurreko atalean laburbildutakoaren arabera, espero duguna (12) koste funtziodun (11) kontrol problemaren emaitza optimoa denbora gehienean (19) ibilbidetik oso gertu mantentzea da. Fenomeno hau irudikatzeko, soluzio optimoa kalkulatu dugu IPOPT((Wächter eta Biegler, 2006)) rutina erabiliz (rutina honek ebazpen metodo zuzen bat erabiltzen du, eta problemaren diskretizaziorako, Euler metodoa erabili da, 100000 denbora-iteraziokin). 1 Irudian turnpike fenomenoa argi ikus daiteke: $[\tau, T-\tau]$ denbora tarte batean, emaitza optimoa turnpike-aren inguruan exponentzialki gertu oszilatzen du.

3.2 Turnpike propietatea nola erabili, jaurtiera bakarreko metodo klasikoa hobetzeko

Orokorrean, kontrol-optimizazio problemak ebazteko metodoak bi multzotan sailkatzen dira: zuzenak (lehenengo problema diskretizatu eta gero optimizazio problema ebazten da) eta ez-zuzenak (lehenengo ebatzi eta gero diskretizatu egiten dute).

Metodo ez-zuzenen artean, jaurtiera bakarreko metodoa da klasikoena eta Pontryaginen Maximoaren Printzipioan onarritzen da. Hura aplikatu ostean, hurrengo sistema lortuko dugu, non kontrola estatubektorea eta bektore-adjuntuaren arabera adierazten den:



1 Irudia: Urdinez: (12) koste funtziodun (11) problemaren emaizta. Beltzez: Problemaren turnpike-a

$$\dot{z}(t) = F(z(t)) \tag{20}$$

bertan $z = (x, p)$. Printzipio horren zeharreko baldintzetatik eta problemaren hasierako baldintzetatik, (20) problemaren muga baldintzak ondorioztatzen dira:

$$G(z(0), z(T)) = 0 \tag{21}$$

Jaurtiera bakarreko metodoa, $z(0)$ doitzean datza (21) baldintzak bete ditzan, horreterako Newton metodoa erabiliz (metodo honi buruzko azalpena (Bulirsch eta Stoer, 2002) liburuan aurki daiteke).

Metodo hau, eta metodo ez-zuzen guztiak orokorrean, nahiko zehatza izan arren, eragospen bat dauka: oso zaila da $z(0)$-rentzat hasiera puntu on bat aurkitzea Newton metodoa konbergitu dezan (ikusi (Trélat, 2005) liburuko 9. kapituluan eragospen honi buruzko azalpenak).

Nola erabili dezakegu kalkulatutako turnpike ibilbidea metodo honen eragozpen hori saihesteko? Badakigu $[\epsilon, T-\epsilon]$ denbora tarte batean bai estatu bektorea eta bai kontrola turnpike-tik oso gertu dagoela, baina hori ez da zertan bete behar hasiera puntuan, beraz ezin dugu ibilbide hura zuzenean hasiera puntutzat hartu. (Trelat eta Zuazua, 2015) artikuluan proposatzen den ideia, Newton metodoa tarteko puntu batetan hastea, $z(T/2)$ puntuan adibidez, eta puntu hori doitzen joatea da, (21) baldintzak bete ditzan.

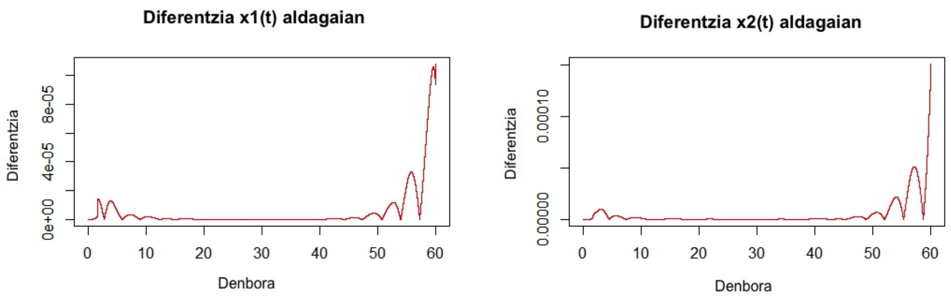
3.3 Jaurtiera bakarreko metodoaren "Turnpike aldaera", Lotka-Volterra optimizazio problema ebazteko

Gure kasuan, Pontryagin Maximoaren Printzipioa aplikatu eta gero, hurrengo sistema eta muga baldintzak lortzen ditugu:

$$\begin{aligned}
\dot{x_1} &= x_1 - x_1x_2 - 0.4x_1u \\
\dot{x_2} &= -x_2 + x_1x_2 - 0.2x_2u \\
\dot{p_1} &= (-1+0.4u)p_1 + x_2(p_1 - p_2) + (x_1 - 1) \\
\dot{p_2} &= (1+0.2u)p_2 + x_1(p_1 - p_2) + x_2
\end{aligned} \tag{22}$$

$$G((x(T/2), y(T/2), p_1(T/2), p_2(T/2)) = (x(0) - 0.5, x_2(0) - 0.7, p_1(T), p_2(T))$$

Aurreko atalean azaldutako ideia erabiliz, R software librean problema hau ebazteko algoritmoa implementatu dugu. Tarteko ekuazio diferentzialak ebazteko, 4. mailako Runge-Kutta metodoa erabili da. Ondoren, emaitza berri honen doitasuna jakiteko, IPOPT-ak ematen digun emaitzarekin konparatu dugu. Horretarako algoritmo biak 60000 iterazio eta 10^{-9} tolerantziarekin exekutatu ditugu. 2 Irudian bi emaitzen arteko diferentzia ikus daiteke, x_1 eta x_2 konponentetan. Ikus daitekenez, azken metodoarekin lortutako emaitzak ez dira txarrak.



2 Irudia: Diferentzia $x_1(t)$ aldagaian (ezkerrean) eta $x_2(t)$ aldagaian (eskuinean)

4 Ondorioak

Denbora tarte luzeetan definitutako problemak ebazteko oso metodo numeriko zehatzak erabili behar dira, akats txiki batek desbiazio handia sor baitzake. Kasu hauetan, turnpike kontzeptua oso erabilgarria da, denbora tarte luzeko problemen ebazpen analitiko zein numerikoan zenbait sinplifikazio egitea ahalbideratzen bait du.

Lan honetan, Trelat eta Zuazua (2015) artikuluan jaurtiera metodo klasikoa hobetzeko proposatzen den ideia egingarria dela erakusten dugu, 2 Irudian ikus daitekeen moduan. Aplikazio hori oso erabilgarria suerta daiteke, metodo hauen inzializazio eragozpenarentzat irtenbide bat delako.

Bestalde, turnpike-aren aplikazioak badu bere desabantailak ere: kontrol optimizazio problema batek ez du zertan turnpike propietatea izan behar, eta izanda ere, problema denbora tarte txikian ebatzi nahi bada, turnpike-a alferrikakoa da. Horrez gain, jaurtiera metodo klasikoa eta beste metodo ez-zuzenak orokorrean, badute turnpike-aren bariante hau saihesten ez dituen beste oztopo batzuk, hala nola, estatu-bektorearen gain baldintzak ezartzea oso zaila da.

5 Etorkizunerako planteatzen den norabidea

Lan honetan Lotka-Volterra ereduarentzat egindakoa erraz zabaldu daiteke kontrol optimizazio problema orokorrentzat. Gainera, jaurtiera bakarreko metodo klasikoaren gain egindako aldaera beste metodo ez-zuzenetan aplika daiteke (jaurteira anitzeko metodoan, adibidez).

Bestalde, gaur egun fenomeno asko ekuazio diferentzial partzialen bidez azaltzen dira. Asko dago egiteke arlo honetan, turnpike fenomenoari dagokionez.

Azkenik, emaitza teoriko hauek aplikagarritasun ugari izan ditzakete. Badira Euskadin biologia arloan populazio dinamika eredu ezberdinenkin lan egiten duten zenbait talde: arrain populazioak ikertzen dituzten AZTI-ko zenbait talde, adibidez, edo minbizi zelulen eredu matematikoekin lan egiten duten Bioguneko zenbait talde (ikusi (Getto *et al.*, 2013) lan hoien adibide gisa). Guztiz naturala suertatuko litzateke eredu hoietan kontrol optimizazio teoria aplikatzea, eta turnpike-aren inguruko emaitzak aplikatu behar izatea problemak denbora tarte luzeetan aztertu nahi ez gero.

Erreferentziak

ANDERSON, BRIAN, eta PETAR V KOKOTOVIC. 1987. Optimal control problems over large time intervals. *Automatica* 23.355–363.

BRAUER, FRED, eta CARLOS CASTILLO-CHAVEZ. 2011. *Mathematical models in population biology and epidemiology*. Springer.

BULIRSCH, ROLAND, eta JOSEF STOER. 2002. *Introduction to numerical analysis*. Springer Heidelberg.

CARLSON, DEAN A, ALAIN HAURIE, eta ARIE LEIZAROWITZ. 1991. *Infinite horizon optimal control: deterministic and stochastic systems*. Springer-verlag.

FERNÁNDEZ-CARA, ENRIQUE, eta ENRIQUE ZUAZUA. 2003. Control theory: History, mathematical achievements and perspectives. *Notes, Universidad de Sevilla and Universidad Autónoma Madrid, Spain* .

GETTO, PHILIPP, ANNA MARCINIAK-CZOCHRA, YUKIHIKO NAKATA, eta OTHERS. 2013. Global dynamics of two-compartment models for cell production systems with regulatory mechanisms. *Mathematical biosciences* 245.258–268.

MCKENZIE, LIONEL W. 1963. The turnpike theorem of morishima (1). *Metroeconomica* 15.146–154.

MORISHIMA, MICHIO. 1961. Proof of a turnpike theorem: The"no joint production"case. *The Review of Economic Studies* 89–97.

PORRETTA, ALESSIO, eta ENRIQUE ZUAZUA. 2013. Long time versus steady state optimal control. *SIAM Journal on Control and Optimization* 51.4242–4273.

RADNER, ROY. 1961. Paths of economic growth that are optimal with regard only to final states: A turnpike theorem. *The Review of Economic Studies* 98–104.

SAMUELSON, PAUL ANTHONY, ROBERT DORFMAN, eta ROBERT M SOLOW, 1958. Linear programming and economic analysis.

TRÉLAT, EMMANUEL. 2005. *Contrôle optimal: théorie & applications*. Vuibert Paris.

TRELAT, EMMANUEL, eta ENRIQUE ZUAZUA. 2015. The turnpike property in finite-dimensional nonlinear optimal control. *Journal of Differential Equations* 258.81–114.

WÄCHTER, ANDREAS, eta LORENZ T BIEGLER. 2006. On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming. *Mathematical programming* 106.25–57.

WILDE, R, eta PV KOKOTOVIC. 1972. A dichotomy in linear control theory. *Automatic Control, IEEE Transactions on* 17.382–383.

ZASLAVSKI, ALEXANDER. 2006. *Turnpike properties in the calculus of variations and optimal control*, volume 80. Springer.

6 Eskerrak eta oharrak

Lehenik eta behin, Enrique Zuazua nire tesi zuzendariari eskerrak eman nahi nizkioke bere laguntza eta gomendioengatik. Emmanuel Trélat, Ander Murua, Alejandro Pozo, Aurora Marica, Jérôme Lohéac, Navid Allahverdi eta Felipe Chaves-Silvari ere eskerrak eman nahi nizkieke, lan honen garapenean eman zidaten laguntzagatik

Lan hau hurrengo proiektuengatik izan da finantziatua: Advanced Grants NUMERIWAVES/FP7-246775 of the European Research Council Executive Agency, Eusko Jaurlaritzako FA9550-14-1-0214, PI2010-04 programakoa, MINECO-ko MTM2011-29306-C02-00, Eusko Jaurlaritzako BERC 2014-2017 programa eta MINECO-k BCAM ikerketa zentruari emandako Severo Ochoa bikaintasun agiriaren bidez, SEV-2013- 0323.