I. IKERGAZTE

NAZIOARTEKO IKERKETA EUSKARAZ

2015eko maiatzaren 13, 14 eta 15
Durango, Euskal Herria

ANTOLATZAILEA:
Udako Euskal Unibertsitatea (UEU)

ZIENTZIA ZEHATZAK ETA NATUR ZIENTZIAK

Ordena partzialak eta talde simetrikoa

A. Estevan

376-381 or.
https://dx.doi.org/10.26876/ikergazte.i.51

Ordena partzialak eta talde simetrikoa

Estevan A.

Nafarroako Unibertsitate Publikoa. Arrosadiako kanpusa 31006, Iruñea.

Laburpena

Artikulu honetan ordena partziala finituen azterketa aljebraikoa proposatzen da. Horretarako ordena partziala finituak aurkezten ditugu, dagozkien Hasseren diagramekin eta zenbakizko irudikapenarekin batera. Irudikapen hauek talde simetrikoko permutazioak bezala interpretatuko ditugu. Horrela, permutazioen familia bat izango dugu ordena partzial bakoitzari lotuta, eta familia horren gaineko azterketa aljebraikoa eginez ordena egituraren ikerketan sakonduko dugu.

Hitz gakoak: ordena partziala, talde simetrikoa

Abstract

In the present paper we deepen in the study of finite partial orders. These orderings can be represented by means of Hasse diagrams and numerical labels. Since these numerical representations can be interpreted by means of permutations, we extend the study to the field of group theory in order to study these order structures from an algebraical point of view.

Keywords: partial orders, symmetric group

1 Sarrera eta motibazioa

Artikulu honetan algebrak eta bereziki talde teoriak egitura ordenatu jakin baten gaineko azterketan joka dezakeen papera aurkeztuko dugu.

Aztertuko dugun ordena egitura ordena partziala izenarekin (*partial order* ingelesez) ezagutzen da eta ezinbesteko papera jokatzen du konputazioan edota erlatibitatearen teorian. Bi arlo horietaz gain, egitura hauek zientziaren arlo oso ezberdinetan aurki daitezke, baita egunerokotasunean ere, esate baterako arbasoen edo eboluzioaren zuhaitz genealogikoaren egitura ordena partzialarena da, edota gure aukeraketa edo ekintza baten ondorioz jazo daitezkeen errealitate posible ezberdinak denboran sailkatzean lortzen den egitura ordenatua ere ordena partziala dugu. Gure kasuan, konputazioaren ikuspegitik egingo dugu lan, non egitura hauen azterketaren helburuetako bat ordenagailuen konputazio abiadura azkartzea den.

Horrela, ordena egitura hauen gaineko ezagutza berria guztiz interesgarria da zientziari dagokionez, ez soilik era matematiko teoriko batean, baizik eta baita modu praktiko batean ere egitura hauen aplikagarritasuna dela eta. Beraz, artikulu honetan aurkezten den ikerketa teknika interesgarria da lagungarria izan baitaiteke egitura ordenatu horien gaineko ikerketan sakontzeko.

2 Arloko egoera eta helburuak

Ikerketaren muinari heldu aurretik goazen arloko oinarrizko hainbat definizio eta notazio ematera.

2.1 Arloko egoera

Definizioa 1. Izan bedi X multzo ez hutsa. X.en gainean definituriko $\mathcal{Q}$ erlazio bitarra $X \times X$ produktu kartesiarraren azpimultzo bat da. $\mathcal{Q} \subseteq X \times X$ erlazio bitarra izanik, $x\,\mathcal{Q}\,y$ idatzi ohi da $(x, y) \in \mathcal{Q}$ adierazteko.

Adibidea 2. $\mathbb{N}$ zenbaki arrunten gaineko $<$ ohiko ordena erlazio bitarra da.

Izan bedi X multzoaren gaineko $\mathcal{Q}$ erlazio bitarra. Ondoko propietateak erabiliko ditugu:

- Erreflexiboa: $x\,\mathcal{Q}\,x \quad \forall x \in X$.
- Simetrikoa: $x\,\mathcal{Q}\,y \iff y\,\mathcal{Q}\,x \quad \forall x, y \in X$.
- Antisimetrikoa: $x\,\mathcal{Q}\,y \;\wedge\; y\,\mathcal{Q}\,x \implies y = x \quad \forall x, y \in X$.
- Iragankorra: $x\,\mathcal{Q}\,y \;\wedge\; y\,\mathcal{Q}\,z \implies x\,\mathcal{Q}\,z \quad \forall x, y, z \in X$.
- Totala: $x\,\mathcal{Q}\,y \;\vee\; y\,\mathcal{Q}\,x \quad \forall x, y \in X$.

Oharra 3. Erlazio totalak erreflexiboak ere badira. Bestalde, erlazio asimetrikoak irreflexiboak dira hala beharrez. Gainera, inplikazio hauen aurkako noranzkoa ez da egia.

Erlazio bitarrak beraien propietateen arabera sailkatzen dira. Goazen oinarrizko batzuk ikustera.

Definizioa 4. Izan bedi X multzo baten gaineko $\mathcal{Q}$ erlazio bitarra. $\mathcal{Q}$ *baliokidetasun erlazioa* dela esaten da erreflexiboa, simetrikoa eta iragankorra baldin bada.

Adibidea 5. Nazionalitatea edo estatu baten herritar izatea baliokidetasun erlazio bezala uler daiteke: Norberak bere buruaren nazionalitate bera du (erreflexiboa); Aimar Ivesen nazionalitate berekoa bada orduan Ives ere Aimarren nazionalitate berekoa da (simetrikoa); eta Ives Aimarren nazionalitate berekoa izanik Aimar Juanen nazionalitate berekoa bada, orduan Juan ere Ivesen nazionalitate berekoa da (iragankorra).

Erraz frogatzen da baliakodetasun erlazioak X multzoaren gaineko partiketa egiten duela azpimultzo edo klase disjuntuetan, adibide honetan nazio edo estatuetan.

Definizioa 6. Izan bedi X multzo baten gainean definituriko $\mathcal{Q}$ erlazio bitarra. Erlazioa asimetrikoa bada, orduan $\mathcal{P}$ zein $\prec$ bidez denotatuko dugu eta *erlazio hertsia* izenaz ere ezagutzen da. Erlazioa totala bada, orduan $\mathcal{R}$ zein $\precsim$ bidez denotatuko dugu eta *erlazio ahula* izenaz ere ezagutzen da.

Definizioa 7. Izan bedi $\precsim$ erlazio bitar erreflexiboa X multzo baten gainean definitua. Edozein $x, y \in X$ bi elementu *aukeraezinak* direla esaten da, eta $x \sim y$ bidez denotatuko dugu, baldin eta $x \precsim y$ eta $y \precsim x$ betetzen bada. Erlazio berri honi, $\sim$ bidez denotatu duguna, *axolagabetasun* erlazioa deituko diogu.

Definizioa 8. Izan bedi $\precsim$ erlazio bitar erreflexiboa X multzo baten gainean definitua. Edozein $x, y \in X$ bi elementu *bereiztezinak* direla esaten da, eta $x \sim_0 y$ bidez denotatuko dugu, baldin eta edozein $z \in X$ elementurako $\{y \prec z \iff x \prec z\}$ eta $\{z \prec y \iff z \prec x\}$ betetzen badira. Erlazio honi, $\sim_0$ bidez denotatu duguna, *bereiztezintasun* erlazioa deritzo.

Teorema 9. *Bereiztezintasun erlazioa baliokidetasun erlazioa da.*

Definizioa 10. X multzo baten gainean definituriko $\precsim$ erlazio total eta iragankorrari *preordena totala* deritzo. Preordena bat antisimetrikoa bada orduan *ordena* deritzo eta $(X, \precsim)$ bikoteak *multzo partzialki ordenatua* edo poset[1] izena jasotzen du. $\precsim$ ordena bat totala baldin bada, orduan $\precsim$ erlazioa *ordena totala* dela esaten da. Kasu honetan, $(X, \precsim)$ bikoteari *katea* edo *multzo guztiz ordenatua* deritzo.

Oharrak 11. (1) $\precsim$ preordena bat emanik, erlazioaren iragankortasuna eta erreflexibitatea dela eta, dagokion $\sim$ axolagabetasun erlazioa baliokidetasun erlazioa da.

(2) Askotan, multzo finitu baten gainean definituriko $\precsim$ ordena partziala $\sqsubseteq$ bidez denotatzen da. Guk ere $\sqsubseteq$ notazioa erabiliko dugu artikulu honetan. Bestalde, $x \sqsubset y$ erabiliko dugu $x \sqsubseteq y$ eta $x \neq y$ bi baldintzak betetzen direnean.

Definizioa 12. Izan bedi X multzo baten gainean definituriko $\sqsubseteq$ ordena partziala. $x, y \in X$ elementuak *alderaezinak* direla esango dugu baldin eta $\neg(x \sqsubseteq y)$ eta $\neg(y \sqsubseteq x)$ betetzen badira. Kasu honetan $x \bowtie y$ notazioa ere erabiliko dugu.

Izan bedi X multzo finitua eta ez hutsa $\sqsubseteq$ ordena partzialaz horniturik. Ondoko definizioak egitura hauen zenbakizko irudikapenaren ideia aurkezten digu (ikus (3)):

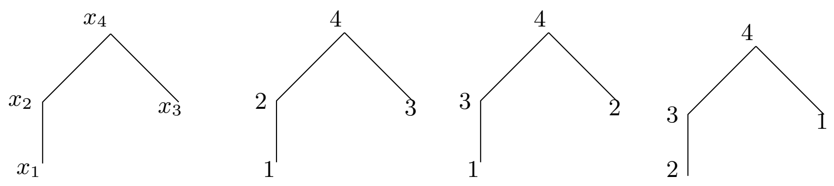
[1]Ingelesezko ‘partially ordered set’ izena laburtzetik.

Definizioa 13. Izan bedi $(X, \sqsubseteq)$ multzo partzialki ordenatua, non $|X| = n$. $u\colon (X, \sqsubseteq) \to \{1, ..., n\}$ funtzioa ordena partzialaren *label-funtzioa* bezala ezagutzen da baldin eta edozein $x \sqsubset y$ bikoterako $u(x) < u(y)$ betetzen bada, $x, y \in X$ izanik.

Definizioa 14. Izan bedi $(X, \sqsubseteq)$ multzo partzialki ordenatua. Posible diren $\mathcal{F} = \{u_i\}_{i \in I}$ label-funtzio guztien familiari *zorizko egitura* deritzo, eta $\mathcal{R}_{\mathcal{L}}(X, \sqsubseteq)$bidez denotatzen da.

Hasseren diagrama multzo finitu eta partzialki ordenatuak irudikatzeko diagrama matematikoa da (ikus (3)), adibide bidez aurkezten dugu:

Adibidea 15. Izan bedi $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ multzo partzialki ordenatua ondoko erlazioa dela eta: $\{x_1 \sqsubset x_2 \sqsubset x_4,\ x_3 \sqsubset x_4\}$. Orduan multzo partzialki ordenatu honi ondoko Hasseren diagrama eta zorizko egitura dagozkio (ikus Irudia 1):



1 Irudia: Multzo partzialki ordenatua eta bere label-funtzioak.

Oharra 16. Multzo partzialki ordenatu bati zorizko egitura bakar bat dagokio, eta alderantziz, zorizko egitura batek erlazio bakar bat definitzen du multzoaren gainean (ikus (3)).

Oharrak 17. (1) $(X, \sqsubseteq)$ multzo partzialki ordenatua eta $\mathcal{R}_{\mathcal{L}}(X, \sqsubseteq)$ dagokion zorizko egitura izanik (hau da, label-funtzio guztien familia), orduan alderaezinak diren edozein $x, y \in X$ elementuetarako $u, v \in \mathcal{R}_{\mathcal{L}}(X, \sqsubseteq)$ bi label-funtzio existituko dira non $u(x) < u(y)$ eta $v(y) < v(x)$ betetzen den.

(2) Bi elementu bereiztezinak baldin badira, orduan $\{y \prec z \iff x \prec z\}$ eta $\{z \prec y \iff z \prec x\}$ $(z \in X)$ betetzen denez, edozein $u_i \in \mathcal{R}_{\mathcal{L}}(X, \sqsubseteq)$ label-funtziorako ondokoak ere beteko dira:

(i) $u_i(y) < u_i(z) \quad \forall u_i \in \mathcal{R}_{\mathcal{L}}(X, \sqsubseteq) \iff u_i(x) < u_i(z) \quad \forall u_i \in \mathcal{R}_{\mathcal{L}}(X, \sqsubseteq)$,

(ii) $u_i(z) < u_i(y) \quad \forall u_i \in \mathcal{R}_{\mathcal{L}}(X, \sqsubseteq) \iff u_i(z) < u_i(x) \quad \forall u_i \in \mathcal{R}_{\mathcal{L}}(X, \sqsubseteq)$.

Ondorioz, $x \sim_0 y$ jazoz gero, edozein $u_i \in \mathcal{R}_{\mathcal{L}}(X, \sqsubseteq)$ label-funtzio harturik, $u_j \in \mathcal{R}_{\mathcal{L}}(X, \sqsubseteq)$ beste label-funtzio bat eraiki dezakegu x eta y elementuei dagozkien labelak edo irudiak elkar trukatuz, hau da: $u_j(x) = u_i(y), u_j(y) = u_i(x)$ eta $u_j(z) = u_i(z)$ (edozein $z \neq x, y$).

(3) Argi dago bereiztezintasun klaseak azpimultzo isolatuak[2] direla.

Oharrak 18. Ohartu label-funtzioak talde simetrikoko[3] permutazioak bezala uler daitezkeela: label-funtzio baten bidez X multzoko elementu bakoitzari zenbaki bat esleitzen badiogu, gainontzeko label-funtzioak multzoko elementuei esleitutako zenbaki horien gaineko permutazioak bezala interpreta daitezke.

Esate baterako, lehengo adibidean hiru label-funtzioak identitatea eta (123) eta (23) permutazioak bezala uler daitezke, ondoko taulan islatzen dugun bezala:

$\mathcal{R}_{\mathcal{L}}(X, \sqsubseteq)$	x_1	x_2	x_3	x_4	Hedapen lineala
Id	1	2	3	4	$x_1 < x_2 < x_3 < x_4$
$F = (123)$	2	3	1	4	$x_3 < x_1 < x_2 < x_4$
$G = (23)$	1	3	2	4	$x_1 < x_3 < x_2 < x_4$

Permutazioen bidezko interpretazio hau ondoko definizioren bidez zehaztuko dugu.

[2]Informazio gehiago dago azpimultzo isolatuez ('isolate subsets' ingelesez) (3) liburuan.
[3]Talde simetrikoaz gehiago jakiteko ikus (1) liburua.

Definizioa 19. Izan bedi $(X, \sqsubseteq)$ multzo partzialki ordenatua (non $|X| = n$) eta $\mathcal{R}_{\mathcal{L}}(X, \sqsubseteq)$ bere zorizko egitura, hau da, $\{u_i\}_{i=1,\dots,m}$ label-funtzio posible guztien familia. Σ_n talde simetrikoko $\mathcal{F}$ azpimultzoak zorizko egitura *karakterizatzen* duela esango dugu baldin eta soilik baldin $v \in \mathcal{R}_{\mathcal{L}}(X, \sqsubseteq)$ label-funtzioa existitzen bada non edozein $u \in \mathcal{R}_{\mathcal{L}}(X, \sqsubseteq)$ label-funtziorako $\sigma_u \in \mathcal{F}$ permutazioa existitzen den $u(x) = \sigma_u(v(x))$ baldintza betez edozein $x \in X$ elementurako.

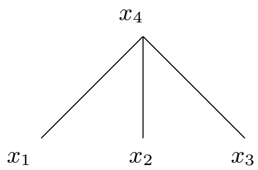
Oharra 20. (1) Ondorioz, v label-funtzio horren aukeraketa egin ostean (non edozein $u \in \mathcal{R}_{\mathcal{L}}(X, \sqsubseteq)$ label-funtziorako $\sigma_u \in \mathcal{F}$ permutazioa existitzen den $u(x) = \sigma_u(v(x))$ baldintza betez edozein $x \in X$ elementurako) label-funtzio bakoitza permutazio bat bezala uler dezakegu. Partikularrean, v identitatea permutazioarekin erlazionatuko genuke.

(2) v label-funtzioaren aukeraketa arbitrarioa da, beraz, beste v' label-funtzio bat aukeratzen baldin badugu, orduan lortzen den $\mathcal{F}'$ permutazioen azpimultzoa (non edozein $u \in \mathcal{R}_{\mathcal{L}}(X, \sqsubseteq)$ label-funtziorako $\sigma_u \in \mathcal{F}$ permutazioa existitzen den $u(x) = \sigma_u(v'(x))$ baldintza betez edozein $x \in X$ elementurako) $\mathcal{F}$ azpimultzoaren ezberdina izango da. Dena den, $\mathcal{F} = \{Id, \sigma_2, ..., \sigma_m\}$ multzotik $\mathcal{F}' = \{Id, \sigma'_2, ..., \sigma'_m\}$ multzora pasa gaitezke σ permutazio baten bidez, non $\sigma(v(x)) = v'(x)$ (eta alderantziz, $v(x) = \sigma^{-1}(v'(x))$). $v(x) = \sigma^{-1}(v'(x))$ denez, $\sigma_i(v(x)) = \sigma_i(\sigma^{-1}(v'(x)))$[4] beteko da, hortaz, $\sigma'_i = \sigma_i \circ \sigma^{-1}$ betetzen dela ondorioztatzen da.

Adibidez, lehengo adibidera itzuliz, F label-funtzioa Id' identitatea bezala finkatzen badugu (hortaz $(132) \circ Id' = Id$), orduan taulan Id bezala denotaturiko label-funtzioa (132) zikloa litzateke eta G aldiz (12) zikloa ($(12) = (23) \circ (132) = (132) \cdot (23)$).

Ondorioz, permutazio azpimultzo hauek azpitaldeak direneko kasuan ohartu notazio aldaketa hauek talde isomorfismoak baino ez direla.

Oharra 18-n jorratutako adibidean $\mathcal{R}_{\mathcal{L}}(X, \sqsubseteq)$ zorizko egiturari beharrezko permutazioak gehitzen badizkiogu $< \mathcal{F} >$ azpitaldea lortu arte, orduan ordena egitura ere aldatzen ari gara, ondoko 2 irudian agertzen den ordena partziala lortuz:



2 Irudia: $< \mathcal{F} >$ azpitaldeak karakterizaturiko ordena egitura.

3 Ikerketaren muina

Partzialki ordenatutako edozein multzo bere zorizko egituragatik karakterizatua dago eta, azken hau, talde simetrikoko azpimultzo bat bezala uler daiteke. Beraz, talde baten azpimultzoekin lanean dihardugunez, zentzua dauka azpimultzo horiek sortutako azpitaldeak eta azpimultzo horien barnean egon daitezkeen azpitaldeak aztertzea, baita horien esanahiaz galdetzea ere (egitura ordenatuaren ikuspuntutik).

3.1 Multzo partzialki ordenatu batean dagoen preordena totalik handiena

Definizioa 21. Izan bitez $(X, \sqsubseteq)$ multzo ordenatua eta $\mathcal{F}$ zorizko egitura karakterizatzen duen Σ_n talde simetrikoaren azpimultzoa. Izan bedi $< \mathcal{F} >$ azpitaldeak karakterizaturiko $(X, \overline{\sqsubseteq})$ multzo partzialki ordenatua. Orduan, $(X, \overline{\sqsubseteq})$ multzo partzialki ordenatu honi jatorrizko $(X, \sqsubseteq)$ multzo partzialki ordenatuaren *hedapen iragankorra* deituko diogu.

Aurkeztu berri dugun 'hedapen iragankorra'-k ondoko teoreman du motibazioa:

[4]Permutazioekin lan egitean, askotan zikloen arteko konposaketa biderkadura bezala denotatzen da, horrela, $\sigma_i(\sigma^{-1}(v'(x)))$ konposaketa $v'(x)\sigma^{-1} \cdot \sigma_i$ bidez ere denotatzen da.

Teorema 22. *Izan bitez $(X, \sqsubseteq)$ multzo ordenatua eta $\mathcal{F}$ zorizko egitura karakterizatzen duen Σ_n talde simetrikoaren azpimultzoa. Izan bedi $< \mathcal{F} >$ azpitaldeak karakterizaturiko $(X, \overline{\sqsubseteq})$ multzo partzialki ordenatua, hedapen iragankorra deiturikoa. Orduan, $(X, \overline{\sqsubseteq})$ jatorrizko $(X, \sqsubseteq)$ multzo partzialki ordenatuaren parte den eta $\bowtie$ konparaezintasun erlazioa irangankorra egiten duen multzo partzialki ordenaturik handiena da. Hau da, $(X, \overline{\sqsubseteq})$ multzo partzialki ordenatuak ondoko baldintzak betetzen ditu:*

(i) $x \overline{\sqsubseteq} y$ *jazoz gero orduan* $x \sqsubseteq y, \quad x, y \in X$.

(ii) $x \bowtie y$ *eta* $y \bowtie z$ *jazoz gero orduan* $x \overline{\bowtie} y$, $y \overline{\bowtie} z$ *eta* $x \overline{\bowtie} z$ *beteko da,* $x, y, z \in X$.

(iii) X *gaineko beste* $\sqsubseteq'$ *ordena partzial batek (i) eta (ii) baldintzak betez gero, orduan* $\sqsubseteq' \subseteq \overline{\sqsubseteq}$.

Oharra 23. Adibidea 15-eko ordena partzialaren hedapen iragankorra (Oharra 18-n ere aztertua) dagoeneko Irudia 2-n aurkeztu dugu.

Are gehiago, $(X, \sqsubseteq)$ multzo partzialki ordenatuaren hedapen iragankorra preordena totala bezala ere uler daiteke:

Korolarioa 24. *Izan bitez $(X, \sqsubseteq)$ multzo partzialki ordenatua eta $(X, \overline{\sqsubseteq})$ bere hedapen iragankorra. Orduan, hedapen iragankorra preordena totala bezala uler daiteke ondoko moduan:*

X gainean $\precsim$ erlazioa definituko dugu $\overline{\sqsubseteq}$ ordena partzialaren bitartez:

(i) $x \prec y$ *baldin eta soilik baldin* $x \overline{\sqsubset} y$, *eta*

(ii) $x \sim y$ *baldin eta soilik baldin* $x \overline{\bowtie} y$ *edo* $x = y$.

Definizio honekin $\precsim$ erlazioa $\sqsubseteq$ ordena partzialaren parte den preordena totalik handiena da, eta jatorrizko $(X, \sqsubseteq)$ multzo partzialki ordenatuaren hedapen totala *deituko diogu.*

3.2 Multzo partzialki ordenatu bat barruan duen preordena totalik txikiena

Atal honetan aurreko atalaren nolabaiteko azterketa duala egingo dugu. Bada ezberdintasun nabari bat: permutazio multzo bat barruan duen azpitalde txikiena existitzen da eta bakarra da, multzo horrek sortutakoa hain zuzen ere; aldiz, multzo batek barruan duen azpitalde 'handienak' ez du zergatik bakarra izan behar eta hortaz multzoak barruan dituen azpitalde maximaletaz hitz egin beharko dugu. Bakartasun eza hori da aurreko atalarekiko ezberdintasun nabariena. Horren ondorioz, multzo partzialki ordenatu bat emanik, ordena partzial hori barruan duten preordena totala eta minimalen familia lortuko dugu, eta ez 'preordena totalik txikiena' bere zentzurik hertsienean.

Definizioa 25. Izan bitez $(X, \sqsubseteq)$ multzo partzialki ordenatua eta $\mathcal{F}$ zorizko egitura karakterizatzen duen Σ_n talde simetrikoaren azpimultzoa. Izan bedi $\mathcal{F}$ barneko $\mathcal{G}$ azpitalde maximal batek karakterizatutako $(X, \underline{\underline{\sqsubseteq}})$ multzo partzialki ordenatua. Orduan, $(X, \underline{\underline{\sqsubseteq}})$ multzo partzialki ordenatu honi jatorrizko $(X, \sqsubseteq)$ multzo partzialki ordenatuaren *inklusio iragankorra* deituko diogu.

Aurkeztu berri dugun 'inklusio iragankorra'-k ondoko teoreman du motibazioa:

Teorema 26. *Izan bedi $(X, \sqsubseteq)$ multzo ordenatua eta $\mathcal{F}$ zorizko egitura karakterizatzen duen Σ_n talde simetrikoaren azpimultzoa. Izan bedi $\mathcal{F}$ barneko $\mathcal{G}$ azpitalde maximal batek karakterizatutako $(X, \underline{\underline{\sqsubseteq}})$ multzo partzialki ordenatua, inklusio iragankorra deiturikoa.*

Orduan, $(X, \underline{\underline{\sqsubseteq}})$ jatorrizko $(X, \sqsubseteq)$ multzo partzialki ordenatua barruan duen eta $\bowtie$ konparaezintasun erlazioa irangankorra egiten duen multzo partzialki ordenaturik txikiena da. Hau da, $(X, \underline{\underline{\sqsubseteq}})$ multzo partzialki ordenatuak ondoko baldintzak betetzen ditu:

(i) $x \sqsubseteq y$ *jazoz gero orduan* $x \underline{\underline{\sqsubseteq}} y, \quad x, y \in X$.

(ii) $x \underline{\bowtie} y$ *eta* $y \underline{\bowtie} z$ *jazoz gero orduan* $x \underline{\bowtie} z$ *beteko da,* $x, y, z \in X$.

(iii) X *gaineko beste* $\sqsubseteq'$ *ordena partziala batek (i) eta (ii) baldintzak betez gero, orduan* $\neg(\sqsubseteq' \subseteq \underline{\underline{\sqsubseteq}})$.

Are gehiago, $(X, \sqsubseteq)$ multzo partzialki ordenatuaren hedapen iragankorra preordena totala bezala ere uler daiteke:

Korolarioa 27. *Izan bitez* $(X, \sqsubseteq)$ *multzo partzialki ordenatua eta* $(X, \underline{\sqsubseteq})$ *bere inklusio iragankorra. Orduan, inklusio iragankorra preordena totala bezala uler daiteke ondoko moduan:*

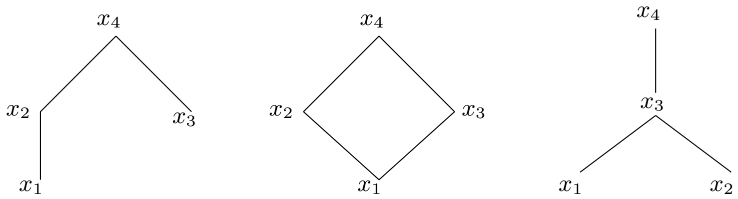
X gainean $\precsim$ *erlazioa definituko dugu* $\underline{\sqsubseteq}$ *ordena partzialaren bitartez:*

(i) $x \prec y$ *baldin eta soilik baldin* $x \underline{\sqsubset} y$*, eta*

(ii) $x \sim y$ *baldin eta soilik baldin* $x \bowtie y$ *edo* $x = y$*.*

Definizio honekin $\precsim$ *erlazioa* $\sqsubseteq$ *ordena partziala barruan duen preordena totalik txikiena da, eta jatorrizko* $(X, \sqsubseteq)$ *multzo partzialki ordenatuaren* inklusio totala *deituko diogu.*

Adibidea 28. Izan bedi $(X, \sqsubseteq)$ Adibidea 15-eko multzo partzialki ordenatua. Ondoko irudian $(X, \sqsubseteq)$ren Hasse diagrama eta bere inklusio iragankorrak aurkezten ditugu:



3 Irudia: Multzo partzialki ordenatua eta bere inklusio iragankorrak.

4 Ondorioak

Ikerketa teknika honen bidez egitura ordenatu ezberdinak erlazionatu ditugu beraien artean. Horrela, multzo partzialki ordenatu batetik abiatuz erlazioari 'fidelen' zaizkion preordena totalak lortu ditugu, 'goitik' zein 'behetik'. Azpimarratzekoa da teknika hau ez dela soilik egitura osoari aplikagarria, baizik eta zatika edo egituraren azpimultzoei aplikagarria den teknika da.

5 Etorkizunerako planteatzen den norabidea

Lehenik eta behin, artikuluan erabilitako teknika honetan sakontzen jarraitu daiteke talde teoriako bestelako tresnen bidez (taldearen zentroa, normalizatzaileak,...). Bestalde, ezaguna da multzo finitu partzialki ordenatuen eta T_0 topologia finituen artean dagoen bijekzioa. Horrela, azken hauen ikerketa permutazioen teknika honen bidez ere guztiz bideragarria da. Azken honek era berean topologien ikerketa ekar dezake, topologiaren azterketa zuzena egin ordez funtzio jarraitu posible guztien multzoaren azteketan oinarrituz (beti ere helburu topologia aldez aurretik finkatua dugula).

Erreferentziak

M. Aschbacher, *Finite group theory (second edition)*. Cambridge. Cambridge University Press, 2000. ISBN 0-521-78675-4.

B. A. Davey, H. A. Priestley, *Introduction to lattices and order (second edition)*. Cambridge. Cambridge University Press, 2002. ISBN-10: 0521784514.

M. Schellekens, *A modular calculus for the average cost of data structuring*. Springer. 2008. SBN 978-0-387-73384-5.

6 Eskerrak eta oharrak

Lan hau Espainiako 'Economia y Competitividad' ministeritzak finantziaturiko MTM2012-37894-C02-02 proiektupean egin da.